ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 16.

I.

О суммованіи нѣкоторыхъ строкъ.

Въ журналѣ Ліувиля за 1846-ой годъ, Пюисо (Puiseux) далъ новый способъ для опредѣленія суммъ одинаковыхъ степеней отъ членовъ ариѳметической прогрессіи (*); подобный же этому способъ можно употребить при опредѣленіи суммъ другихъ строкъ.

1. Такъ, разсматривая строку;

$$\varphi(x) = \frac{x^{a+m} - x^a}{x-1} = x^a + x^{a+1} + x^{a+2} + \ldots\ldots + x^{a+m-1}$$

и полагая:

$$\int \varphi(x)\,dx = \psi_1(x)\ ,\ \int \psi_1(x)\,dx = \psi_2(x)\ ,\ \int \psi_2(x)\,dx = \psi_3(x)\ .\ .\ .\ .\int \psi_{n-1}(x)\,dx = \psi_n(x)\ ,$$

получимъ, по интегрированіи строки n разъ:

$$\psi_n(x) = \frac{x^{a+n}}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n)} + \frac{x^{a+n+1}}{(a+2)(a+3)(a+4)\ldots(a+n+1)} \ldots + \frac{x^{a+m+n-1}}{(a+m)(a+m+1)(a+m+2)\ldots(a+m+n-1)}$$

Пусть: $\psi_1\ ,\ \psi_2\ ,\ \psi_3\ .\ .\ .\ .\ \psi_n$

означаютъ: $\psi_1(x)\ ,\ \psi_2(x)\ ,\ \psi_3(x)\ .\ .\ .\ .\ \psi_n(x)$ для $x=1$,

тогда выраженіе (1) для $x=1$ напишется:

$$\psi_n = \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)(a+4)\ldots(a+n+1)} + \ldots + \frac{1}{(a+m)(a+m+1)\ldots(a+m+n-1)}$$

Но, съ другой стороны, интегрируя n разъ уравненіе:

$$(x-1)\,\varphi(x) = x^{a+m} - x^a$$

получимъ:

$$(x-1)\,\psi_{n-1}(x) - (n-1)\,\psi_n(x) = \frac{x^{a+m+n-1}}{(a+m+1)(a+m+2)\ldots(a+m+n-1)} - \frac{x^{a+n-1}}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)},$$

а для $x=1$, имѣемъ:

$$\psi_n = \frac{1}{n-1}\left[-\frac{1}{(a+m+1)(a+m+2)(a+m+n-1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}\right];$$

слѣдовательно, сравнивая два найденныя значенія для ψ_n, получимъ:

(*) „Sur les sommes des puissances semblables des termes d'une progression arithmetique par Puiseux". p. 477.

$$(A.)\quad \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)\ldots(a+n+1)}+\ldots+\frac{1}{(a+m)(a+m+1)\ldots(a+m+n-1)}=$$
$$=\frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}-\frac{1}{(a+m+1)(a+m+2)\ldots(a+m+n-1)}\right\}.$$

Когда $m=\infty$, число членовъ этой строки будетъ безконечно, и она будетъ имѣть предѣломъ:

$$\frac{1}{(n-1)(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n-1)}$$

т. е.

$$(B.)\quad \frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)\ldots(a+n+1)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)\ldots(a+n+2)}+\ldots=\frac{1}{(n-1)(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)};$$

а для $a=0$, имѣемъ:

$$(C.)\quad \frac{1}{1.\,2.\,3.\,4\ldots n}+\frac{1}{2.\,3.\,4.\,5\ldots(n+1)}+\frac{1}{3.\,4.\,5\ldots(n+2)}+\ldots=\frac{1}{(n-1)\,1.\,2.\,3\ldots\ldots(n-1)}$$

Суммованіе этой послѣдней строки было предложено Vanson'омъ, въ числѣ вопросовъ помѣщаемыхъ въ журналѣ Terquem: „Nouvelles Annales de Mathématiques" (*).

Поставивъ въ строкѣ (A): $a-m-n$ вмѣсто a, получимъ:

$$(D.)\quad \frac{1}{(a-1)(a-2)(a-3)\ldots\ldots(a-n)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)\ldots(a-n-1)}+\ldots+\frac{1}{(a-m)(a-m-1)\ldots(a-m-n+1)}=$$
$$=\frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{(a-m-1)(a-m-2)\ldots\ldots(a-m-n+1)}-\frac{1}{(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}\right\}.$$

Для $m=\infty$ и a весьма большаго положительнаго числа имѣемъ:

$$(E.)\quad \frac{1}{(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)\ldots(a-n-1)}+\ldots\ldots=-\frac{1}{(n-1)(a-1)(a-2)(a-3)\ldots(a-n)}.$$

2. Способъ суммованія строкъ, изложенный въ предъидущемъ параграфѣ, можетъ быть употребленъ и для другихъ строкъ болѣе общихъ нежели предъидущія.

Для этого дифференцируемъ r разъ уравненіе: $\varphi(x)(x-1)=x^{a+m}-x^{a}$, получимъ:

$$\varphi^{(r)}(x)(x-1)=(a+m)^{\frown}\,.\,x^{a+m-r}-a^{\frown r}\,x^{a-r}-r\,\varphi^{(r-1)}(x),$$

полагая теперь:

$$\int x^{b}\varphi^{(r)}(x)\,dx=\overset{r}{\psi}_1(x),\quad \int\overset{r}{\psi}_1(x)\,dx=\overset{r}{\psi}_2(x)\ldots\ldots\int\overset{r}{\psi}_{n-1}(x)\,dx=\overset{r}{\psi}_n(x)$$

$$\int x^{b}\varphi^{(r-1)}(x)\,dx=\overset{r-1}{\psi}_1(x),\quad \int\overset{r-1}{\psi}_1(x)\,dx=\overset{r-1}{\psi}_2(x)\ldots\ldots\int\overset{r-1}{\psi}_{n-1}(x)\,dx=\overset{r-1}{\psi}_n(x),$$

умножимъ предъидущее уравненіе на x^{b} и интегрируемъ его n разъ; получимъ:

$$(x-1)\overset{r}{\psi}_n(x)-n\overset{r}{\psi}_{n+1}(x)=(a+m)^{\frown r}(a+m+b-r)^{\frown -n}x^{a+b+m+n-r}-a^{\frown r}(a+b-r)^{\frown -n}x^{a+b+n-r}-r\overset{r-1}{\psi}_n(x)$$

гдѣ:

$$a^{\frown r}=a(a-1)(a-2)\ldots(a-r+1)$$

$$(a+m)^{\frown r}=(a+m)(a+m-1)(a+m-2)\ldots(a+m-r+1)$$

$$(a+m+b-r)^{\frown -n}=\frac{1}{(a+m+b-r+1)(a+m+b-r+2)\ldots(a+m+b-r+n)}$$

$$(a+b-r)^{\frown -n}=\frac{1}{(a+b-r+1)(a+b-r+2)\ldots(a+b-r+n)},$$

означенія, предложенныя Пр. Лобачевскимъ.

(*) tome XVIII, p. 46.

Полагая въ предъидущей формулѣ $x = 1$, и принимая для $\overset{r}{\psi}_{n+1}(x)$, $\overset{r-1}{\psi}_{n}(x)$ означенія $\overset{r}{\psi}_{n+1}$, $\overset{r-1}{\psi}_{n}$, получимъ:

(1.) $$n \overset{r}{\psi}_{n+1} = r \overset{r-1}{\psi}_{n} + a^{\frown r}(a+b-r)^{\frown -n} - (a+m)^{\frown r}(a+m+b-r)^{\frown -n};$$

но съ другой стороны, дифференцируя r разъ строку:

$$\varphi(x) = x^{a} + x^{a+1} + x^{a+2} + x^{a+3} + \ldots + x^{a+m-1},$$

находимъ:

$$\varphi^{(r)}(x) = a^{\frown r} x^{a-r} + (a+1)^{\frown r} x^{a+1-r} + (a+2)^{\frown r} x^{a+2-r} + \ldots + (a+m-1)^{\frown r} x^{a+m-1-r}.$$

А умножая это выраженіе на x^{b} и интегрируя $n+1$ разъ, будемъ имѣть:

$$\overset{r}{\psi}_{n+1} = a^{\frown r}.(a+b-r)^{\frown -n-1}.\, x^{a+b+n+1-r} + (a+1)^{\frown r}.(a+b+1-r)^{\frown -n-1}.\, x^{a+b+n+2-r} +$$
$$+ (a+2)^{\frown r}.(a+b+2-r)^{\frown -n-1}.\, x^{a+b+n+3-r} + \ldots + (a+m-1)^{\frown r}.(a+b+m-r)^{\frown -n-1}.\, x^{a+b+m+n-r},$$

или, полагая $x = 1$, получимъ:

(2.) $$\overset{r}{\psi}_{n+1} = a^{\frown r}.(a+b-r)^{\frown -n-1} + (a+1)^{\frown r}.(a+b+1-r)^{\frown -n-1} + (a+2)^{\frown r}(a+b+2-r)^{\frown -n-1} + \ldots$$
$$\ldots + (a+m-1)^{\frown}.(a+b+m-r)^{\frown -n-1}.$$

Сравнивая выраженія (1) и (2), найдемъ значеніе послѣдней строки, выраженное функціею: $\overset{r-1}{\psi}_{n}$, которую можно опредѣлить изъ формулы составленной подобно (1); но при этомъ надобно различать три случая; а именно:

1) Когда $n > r$, т. е. когда число интегрированій, разсматриваемаго уравненія, болѣе числа дифференцированій; тогда давая r и n различныя значенія сведемъ функціи:

$$\overset{r-1}{\psi}_{n}, \quad \overset{r-2}{\psi}_{n}, \quad \overset{r-2}{\psi}_{n} \ldots \overset{r-2}{\psi}_{n-1}, \quad \overset{r-3}{\psi}_{n-1}, \ldots$$

на:

$$\psi_2, \quad \psi_3, \quad \psi_4 \ldots\ldots$$

суммованіе которыхъ извѣстно.

2) Когда $n = r$. Тогда всѣ функціи приводятся къ одной:

$$\psi_1 = \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{a+b+2} + \frac{1}{a+b+3} + \ldots + \frac{1}{a+b+m}.$$

3) Когда $n < r$; то, давая различныя значенія r и n, приходимъ къ функціямъ:

$$\overset{1}{\psi}_1, \quad \overset{2}{\psi}_1, \quad \overset{3}{\psi}_1 \ldots \overset{2}{\psi}_2, \quad \overset{3}{\psi}_2 \ldots,$$

суммованіе которыхъ по предъидущему способу произведено быть не можетъ.

1-го Марта

1861-го года.

Л. Износковъ.

Ueber den Kkümmungs-Schwerpunct algebraischer Curven.

Steiner versteht bekanntlich bei einer *beliebigen* Curve (Crelle's Journal, Bd. 21. Pag. 56) unter diesen Namen denjenigen Punct, in welchen der Schwerpunct der Curve fallen wird, sobald die Elemente derselben mit Gewichten belastet sind, die ihren Krümmungsradien umgekehrt proportional sind. — Ist u eine beliebige ganze algebraische Function der Coordinaten x, y so besitzt der Krümmungsschwerpunct der Curve $u = Const.$ einige Eigenschaften, auf welche aufmerksam zu machen, der Zweck dieser Note ist.

I. »Construirt man sämmtliche Tangenten der Curve »$u=0$, welche einer beliebig angenommenen Richtung »parallel laufen; so fällt der Schwerpunct (*) der »hiedurch erhaltenen Contactpuncte, wie auch jene »Richtung gewählt sein mag, immer mit dem Krümmungsschwerpunct der Curve zusammen.«

Dieser Satz ist als ein Zusatz zu einem bereits bekannten, von Chasles und Liouville bewiesenen, Theorem anzusehen; demzufolge die Contactpuncte eines Systems paralleler, an die Curve $u = 0$ gelegter, Tangenten

(*) Sobald schlechtweg vom Schwerpunct eines Punctsystemes gesprochen wird, soll jeder, dem System angehörige, Punct mit gleichem Gewicht belastet gedacht werden.

(s. **Liouville**, Sur quelques propositions gén. de géométrie. Journal de Math. par Liouville. Tome VI, P. 345.) stets *denselben* Schwerpunct besitzen, welches auch die gemeinsame Richtung des Tangentensystemes sein mag. Der eben angegebene Satz (I.) fügt nur hinzu, dass dieser, bereits bekannte, unveränderliche Punct identisch ist mit dem Krümmungsschwerpunct der Curve.

II. »*Construirt man sämmtliche Schnittpuncte der* »*beiden Curven* $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ *und* $\frac{\partial u}{\partial y}=0$; *so ist der* »*Schwerpunct dieser Schnittpuncte identisch mit* »*dem Krümmungsschwerpunct der Curve* $u=0$.«

Den Beweis dieses Satzes unterdrücke ich, und bemerke nur, dass die Methode desselben ähnlich ist mit derjenigen, welche Liouville in dem bereits citirten Aufsatz in Anwendung gebracht hat. Beiläufig ergiebt sich hieraus folgende Bemerkung:

IIa. »Setzt man u gleich einem veränderlichen Parameter C, so haben alle Curven des Systemes $u=C$ ein »und denselben Krümmungsschwerpunct.«

Diese Bemerkung erhält eine ausserordentliche Veralgemeinerung in folgendem Satz:

III. »Ist u eine Function n-ten Grades, und $u\equiv v+w$, »wo v die Terme n-ten und $(n-1)$-ten Grades, w »dagegen alle übrigen Terme umfassen soll; so können die in w enthaltenen constanten Coefficienten »beliebig geändert werden, ohne dass dadurch die Lage des Krümmungsschwerpunctes der Curve $v+w=0$ »eine andere wird.«

Auch dieser Satz ergiebt sich, ebenso wie (I.), leicht aus der citirten Abhandlung von Liouville.

Die Sätze (I.) und (III.) sind also nur als Bemerkungen anzusehen, welche sich bereits bekannten Theoremen leicht anschliessen. Wesentlich nun hingegen ist der in (II.) aufgestellte Satz.

Halle. Mai 1861. *C. Neumann.*

Замѣчаніе на одну статью сочиненія: „Cours d'Algèbre supériore, par Serret."

Въ 14-мъ урокѣ поименованнаго сочиненія *Serret* даетъ способъ опредѣлять $V_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ въ функціи z, $\left(z = x + \frac{1}{x}\right)$,—что бываетъ необходимо при рѣшеніи возвратныхъ уравненій,—посредствомъ интегрированія дифференціальнаго уравненія 2-го порядка.

Другой способъ опредѣленія V_n, нредложенный въ Note 1, основанъ на приложеніи формулы Waring'а къ опредѣленію суммы степеней корней квадратнаго уравненія; но 1-й способъ авторъ считаетъ самымъ простѣйшимъ.

Я предлагаю здѣсь еще болѣе простой способъ опредѣленія V_n посредствомъ конечныхъ разностей.

Сохраняя обозначеніе Serret:

$$V_0 = x^0 + \frac{1}{x^0} = 2\,,\ V_1 = x + \frac{1}{x} = z\,,\quad V_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2\,,\ V_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z$$

$$V_4 = z^4 - 4z^2 + 2 \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, V_n = x^n + \frac{1}{x^n}$$

имѣемъ

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right),$$

т. е.

$$V_{n+1} = V_n\, z = V_{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Полагая:

$$V_{n-1} = x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} = z^{n-1} + A_0 z^{n-3} + B_0 z^{n-5} + C_0 z^{n-7} + \ldots\ldots$$

$$V_n \quad = x^n \quad + \frac{1}{x^n} \quad = z^n \quad + A_1 z^{n-2} + B_1 z^{n-4} + C_1 z^{n-6} + \ldots\ldots$$

$$V_{n+1} = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = z^{n+1} + A_2 z^{n-1} + B_2 z^{n-3} + C_2 z^{n-5} + \ldots\ldots,$$

на основаніи уравненія (I) получимъ:

$$z^{n+1} + A_2 z^{n-1} + B_2 z^{n-3} + C_2 z^{n-5} + \ldots = z^{n+1} + \begin{matrix} A_1 \\ -1 \end{matrix} \Bigg| \, z^{n-1} + \begin{matrix} B_1 \\ -A_0 \end{matrix} \Bigg| \, z^{n-3} + \begin{matrix} C_1 \\ -B_0 \end{matrix} \Bigg| \, z^{n-5} + \ldots,$$

откуда выводимъ слѣдующія соотношенія между коефиціентами:

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 - 1 \\ B_2 &= B_1 - A_0 \\ C_2 &= C_1 - B_0 \\ D_2 &= D_1 - C_0 \\ E_2 &= E_1 - D_0 \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \left.\begin{aligned} \Delta A_1 &= -1 \\ \Delta B_1 &= -A_0 \\ \Delta C_1 &= -B_0 \\ \Delta D_1 &= -C_0 \\ \Delta E_1 &= -D_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Замѣтимъ, что въ выраженіяхъ вида $V_{2p+1}=V_1$, V_3, V_5 . . . постоянное количество равно нулю, въ выраженіяхъ вида $V_{4p+2}=V_2$, V_6 . . . постоянное количество равно -2, въ выраженіяхъ вида V_{4p} он равно $+2$.

Интегрируя по конечнымъ разностямъ уравненія (II), получимъ

$$A_1=-n+\alpha \text{ ; при } n=2,\ A_1=-2,\ \alpha=0; \text{ слѣдовательно } A_1=-n,\ A_0=-(n-1).$$

$$\Delta B_1=n-1,\ B_1=\beta+\frac{(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2},\ \text{при } n=4,\ B_1=2,\ \beta=0,\ B_1=\frac{(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}-1,\ B_0=\frac{(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2}-1.$$

$$\Delta C_1=1-\frac{(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2};\ C_1=n-\frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3}+\gamma; \text{ при } n=6,\ C_1=-2,\ \gamma=-4$$

$$C_1=n-4-\frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3};\ C_0=n-5-\frac{(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$\Delta D_1=\frac{(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}-(n-5);\ D_1=\frac{(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\,(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}-\frac{(n-5)\,(n-6)}{1\,.\,2}+\delta$$

$$\text{при } n=8,\ D_1=2,\ \delta=0;\ D_0=\frac{(n-4)\,(n-5)\,(n-6)\,(n-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}-\frac{(n-6)\,(n-7)}{1\,.\,2}.$$

$$\Delta E_1=\frac{(n-6)\,(n-7)}{1\,.\,2}-\frac{(n-4)\,(n-5)\,(n-6)\,(n-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4};\ E_1=\frac{(n-6)\,(n-7)\,(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3}-\frac{(n-4)\,(n-5)\,(n-6)\,(n-7)\,(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}+\varepsilon$$

при $n=10$, $E_1=-2$, $\varepsilon=0$ и вообще постоянное количество во всѣхъ слѣдующихъ членахъ равно нулю.

Такимъ образомъ зная A_1, B_1, C_1, D_1 . . . и т. д. найдемъ

$$V_n=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=z^n-n\,z^{n-2}+\left[\frac{(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}-1\right]z^{n-4}+\left[n-4-\frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3}\right]z^{n-6}-$$

$$-\left[\frac{(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\,(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}-\frac{(n-5)\,(n-6)}{1\,.\,2}\right]z^{n-8}+\left[\frac{(n-6)\,(n-7)\,(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3}-\frac{(n-4)\,(n-5)\,(n-6)\,(n-7)\,(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\right]z^{n-10}$$

$$+\ldots\ldots\ldots+(-1)^p\left[\frac{(n-p+1)\,(n-p)\,(n-p-1)\ldots(n-2p+2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.p}-\frac{(n-p-1)\,(n-p-2)\ldots\ldots(n-2p+2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(p-2)}\right]z^{n-2p}+\ldots$$

Законъ составленія коефиціентовъ получается въ другой формѣ, нежели у Serret, но нетрудно обнаружить приведеніемъ къ одному знаменателю тожество обѣихъ формъ.

Дѣйствительно общій членъ у Serret выражается при разложеніи V_n такъ:

$$(-1)^p.\,\frac{n\,(n-p-1)\,(n-p-2)\ldots(n-2p+2)\,(n-2p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots p}\,z^{n-2p},$$

а здѣсь

$$(-1)^p.\left[\frac{(n-p+1)\,(n-p)\,(n-p-1)\ldots.(n-2p+2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p}-\frac{(n-p-1)\,(n-p-2)\ldots\ldots(n-2p+2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p-2}\right]z^{n-2p}.$$

Наша форма даетъ по вынесеніи за скобку общаго множителя

$$(-1)^p.\,\frac{(n-p-1)\,(n-p-2)\,(n-p-3)\ldots.(n-2p+2)}{1\,.\,2\ldots.(p-2)}\left[\frac{(n-p+1)\,(n-p)}{(p-1)\,p}-1\right]z^{n-2p},$$

но $\frac{(n-p+1)\,(n-p)}{(p-1)\,p}-1=\frac{n\,(n-2p+1)}{(p-1)\,p}$, слѣдовательно общій членъ и въ нашей формѣ приметъ видъ

$$(-1)^p.\,\frac{n\,(n-p-1)\,(n-p-2)\ldots(n-2p+2)\,(n-2p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.p}\,z^{n-2p}$$

и по приведеніи къ одному знаменателю:

$$V_n=x^n+\frac{1}{x^n}=z^n-nz^{n-2}+\frac{n\,(n-3)}{1\,.\,2}\,z^{n-4}-\frac{n\,(n-4)\,(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\,z^{n-6}+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^p.\,\frac{n\,(n-p-1)\,(n-p-2)\,(n-p-3)\ldots(n-2p+2)\,(n-2p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.p}\,z^{n-2p}+\ldots.$$

какъ у Serret.

Н. Бугаевъ.

III.

Извѣстіе о Пантелеграфѣ Г-на Казелли.

Идея передачи телеграфическихъ депешъ въ видѣ автографовъ уже давно занимала многихъ ученыхъ Германіи и Франціи. Полное осуществленіе оной принадлежитъ Г-ну Казелли въ Парижѣ, и сколько можно судить по первому сообщенію Г. Муаньо (Cosmos T. 18, 21 juin p. 674), сдѣланные доселѣ опыты превосходятъ самыя блестящія ожиданія, какія только можно было имѣть въ настоящее время. Мы видили, говоритъ Муаньо, у Г-на Казелли альбомъ, наполненный афтографными письмами и рисунками, полученными изъ Аміена. Портреты Императорской фамиліи, планъ Бородинской битвы на 3-хъ листахъ, афтографы па французскомъ, нѣмецкомъ и итальянскомъ языкахъ. Весьма недавно мы были свидѣтелями полученія слѣдующей депеши изъ Аміена, образовавшейся передъ нашими глазами, по истинѣ съ удивительною правильност ю и отчетливостію:

La rapidité du Pantélégraphe est supérieure à celle du système actuellement en usage. Par l'écriture, ordinaire, on transmet de dix à quinze mots à la minute, et cinquante ou soixante par la sténographie.

Къ этому Г. Муаньо присовокупляетъ, что и автографическая передача сигналовъ Морса производится со скоростію 50 или 60 словъ въ минуту. Окончательно устраиваемые аппараты, которыхъ описаніе не замѣдлитъ явиться и которыя, по выраженію Муаньо, будутъ составлять одну изъ поразительнѣйшихъ диковинъ всемирной Лондонской выставки 1862 г., будутъ употр еблены: 2 со стороны главнаго телеграфнаго управленія между Парижемъ и Марселью и кромѣ того 5 самимъ Г-мъ Казелли въ Лондонѣ, Парижѣ, Марсели, Флоренціи и Неаполѣ, такъ что они образуютъ непрерывную линію, и при посредствѣ только 4-хъ релэ (relais) возможна будетъ передача депешъ со всякаго пункта въ Неаполь.

IV.

О составѣ солнечной системы.

(Письмо Леверье къ Маршалу Вальянъ).

Я съ удовольствіемъ извѣщаю Васъ объ окончаніи моихъ продолжительныхъ изслѣдованій относительно движенія 4 планетъ нашей системы: Меркурія, Венеры, Земли и Марса Наиболѣе практическій результатъ моихъ изслѣдованій, вытекающій изъ сравненія теоріи съ наблюденіями, состоитъ безъ сомнѣнія въ астрономическихъ таблицахъ, превосходящихъ точностію употребляемыя до сего времени. Тѣмъ не менѣе, одной надежды дать таблицы строгой точности, было бы недостаточно для того, чтобы побудитъ астронома на 20-ти лѣтній сухой трудъ, если бы онъ не поддерживался мыслью, въ тоже время, покрайней мѣрѣ подготовить какое либо позднѣйшее открытіе. Оставляя здѣсь изложеніе формулъ и длинныхъ вычисленій, я ограничусь сообщеніемъ ближайшихъ результатовъ, относящихся къ физическому устройству планетной системы.

Существованіе тѣлъ, составляющихъ солнечную систему, обнаруживается простѣйшимъ образомъ, если они дѣлаются доступными непосредственному наблюденію. Но при этомъ можно опасаться, что, ограничиваясь одною видимостію этихъ тѣлъ, многія изъ нихъ могутъ остаться для насъ неизвѣстными, несмотря на самыя могущественныя оптическія орудія, если мы не будемъ въ состояніи пополнить недостатокъ нашего зрѣнія какимъ либо особымъ способомъ изслѣдованія.

Плоскости планетныхъ орбитъ перемѣщаются съ теченіемъ времени въ слѣдствіе дѣйствія массъ, лежащихъ внѣ центральнаго тѣла; тоже самое относится и къ положенію самыхъ орбитъ въ ихъ плоскостяхъ, наконецъ и самая форма орбитъ подвержена измѣненіямъ. Понятно, что мѣра этихъ измѣненій, выводимыхъ изъ наблюденія, можетъ служить къ опредѣленію вѣса самыхъ массъ, производящихъ эти измѣненія. Сверхъ того, если предположить, что единственныя массы, производящія возмущенія, суть извѣстныя доселѣ массы планетъ; то необходимо, чтобы результаты, извлеченные изъ измѣненій всѣхъ орбитъ, согласовались между собою и давали тѣже самыя величины массъ; въ противномъ случаѣ необходимо допустить, что какія либо постороннія причины еще не приняты въ расчетъ. Другими словами: приписывая извѣстнымъ планетамъ соотвѣтственныя массы, можно ли удовлетворительно представить всѣ наблюденія, или же въ нашей планетной системѣ существуетъ еще значительное количество матеріи, которое опущено въ вычисленіяхъ, но дѣйствіе котораго необходимо подвергнуть разсмотрѣнію.?

Отдѣльное изученіе движенія каждой изъ планетъ не позволило бы дать отвѣта на этотъ вопросъ; между тѣмъ какъ сравненіе совокупныхъ результатовъ, позволитъ намъ рѣшить оный несомнѣннымъ образомъ. Необходимыя и единственныя положенія, принятыя мною въ новой теоріи Марса, а равно и въ предшествовавшихъ трудахъ, суть слѣдующія:

Положеніе и незначительность массъ Меркурія и Марса не позволяютъ имъ производить значительныхъ возмущеній въ нашей системѣ. Наблюденія Венеры даютъ для Меркурія $1/5000000$ массы солнца, а движеніе земли, выводимое изъ наблюденій солнца, опредѣляетъ массу Марса $= 1/3000000$ Неточности, могущія содержаться въ этихъ числахъ, не имѣютъ никакого вліянія на послѣдующіе результаты.

Масса Венеры составляетъ около $1/400000$ массы солнца. Этотъ результатъ получается различными путями: разсмотрѣніемъ перемѣщенія плоскости эклиптики, физическою мѣрою періодическихъ возмущеній въ движеніи Земли отъ 1750 до 1810 г. и отъ 1811 до 1850 г. измѣреніемъ періодическихъ неравенствъ въ долготѣ Меркурія. Всѣ результаты взаимно подтверждаютъ другъ друга.

Масса Земли составляетъ $^1/_{355000}$ солнечной массы. Это число выводится изъ сравненія силы тяжести на поверхности земной съ величиною паденія нашей планеты къ солнцу.

На основаніи этихъ данныхъ можно было основать теорію Марса, а потомъ сравнить оную съ меридіанными наблюденіями этой планеты, обнимающими цѣлое столѣтіе, равно какъ и съ наблюденіями приближенія Марса къ звѣздѣ ψ_2 Водолея, произведенными въ 1672 г. въ Парижѣ Кассини и Ромеромъ, въ Кайенѣ Бугеромъ, и послужившими для изслѣдованій относительно рефракціи, къ опредѣленію наклонности эклиптики и параллакса солнца.

Но при этомъ оказалось, что такимъ образомъ нельзя представить всѣхъ наблюденій планеты, и дабы достигнуть этого необходимо *увеличить движеніе ея пиригелія.* Это увеличеніе, если мы желаемъ получить оное чрезъ измѣненіе въ принятыхъ величинахъ планетныхъ массъ, не можетъ слѣдовать изъ перемѣны массы Венеры, не оказывающей достаточно значительнаго вліянія на движеніе Марса, но только изъ увеличенія земной массы, а именно еще на *одну десятую* ея выше принятой величины.

Мы разберемъ ниже слѣдствія этаго результата, который впрочемъ подтверждается и выводами, извлеченными изъ теоріи Венеры. Возрастаніе широтъ этой планеты приводитъ къ одному неизбѣжному условію, которое неиначе можетъ быть удовлетворено, какъ допуская соотвѣтственныя увеличенія или для массы Венеры или для Земли. Публикуя теорію Венеры, я уже замѣтилъ, что условія упомянутыя выше не позволяютъ измѣненій въ величинѣ ея массы; поэтому казалось бы необходимымъ увеличить земную массу на *одну десятую* ея величины; но по важности этаго заключенія надлежало остановиться въ выводѣ дальнѣйшихъ слѣдствій, въ ожиданіи, какой результатъ доставитъ теорія Марса. Но теперь мы видимъ, что послѣдняя въ свою очередь требуетъ такого же увеличенія массы Земли, а именно на одну *десятую.*

Я долженъ напомнить здѣсь, прежде чѣмъ пойду далѣе, что изслѣдованія Меркурія привели меня къ результату того же рода. Наблюденія открываютъ болѣе быстрое движеніе его перигелія, нежели какое бы должно было соотвѣтствовать величинѣ принятыхъ массъ. Измѣненіе на одну десятую въ массѣ Земли не въ состояніи оправдать этого явленія; и такъ какъ было невозможно увеличить массу Венеры, то я заключилъ изъ того о существованіи массъ, образующихъ кольцо между Меркуріемъ и Солнцемъ. Уже до сихъ поръ довольно разсуждали и еще будутъ разсуждать объ этомъ предметѣ, поэтому считаю небезполезнымъ привести здѣсь выраженія, въ которыхъ я высказалъ мое мнѣніе (Annales de l' Observ. T. V. p. 105.)

»Съ точки зрѣнія механической, гипотеза возмущающей массы, которой положеніе остается неопредѣленнымъ, можетъ удовлетворить наблюдаемымъ явленіямъ въ прохожденіяхъ Меркурія предъ солнечнымъ дискомъ. Но во всякомъ случаѣ необходимо изслѣдовать и въ отношеніи физическомъ, всѣ ли рѣшенія было-бы одинаково возможнымъ допустить?

Въ среднемъ разстояніи отъ солнца = 0,17 возмущающая масса была бы точно равно массѣ Меркурія. Наибольшее отклоненіе отъ солнца, какого она могла бы достигать = 10°. Можно ли думать, чтобы планета, гораздо болѣе блестящая чѣмъ Меркурій была необходимо усмотрѣна передъ восходомъ или по захожденіи солнца, близь горизонта;? или, возможно ли чтобы напряженіе разсѣяннаго солнечнаго свѣта навсегда скрывало это свѣтило отъ нашихъ взоровъ? Съ удаленіемъ отъ солнца возмущающая масса и безъ сомнѣнія ея объемъ должны быть менѣе, но отклоненіе отъ солнца значительнѣе. Наоборотъ ближе къ солнцу, при большей массѣ и объемѣ, свѣтъ возмущающаго тѣла былъ бы еще сильнѣе, но и близость къ солнцу столь значительна, что казалось бы возможнымъ, что такое свѣтило, котораго положеніе неизвѣстно не было усмотрѣно при обыкновенныхъ обстоятельствахъ. Но, въ этомъ именно случаѣ, какимъ образомъ тѣло, находящееся всегда вблизи солнца и сильно блестящее, не могло быть доселѣ видимо при одномъ изъ полныхъ солнечныхъ затмѣній? Наконецъ не должно ли бы это свѣтило быть замѣченнымъ во время прохожденія его по солнечному диску.

Таковы возраженія, которыя можно сдѣлать противъ существованія единственной планеты, сравнимой по величинѣ съ Меркуріемъ и обращающейся внутри орбиты послѣдняго. Тотъ, кому эти возраженія покажутся весьма важными, долженъ допустить вмѣсто этой одной планеты рядъ астероидовъ, коихъ дѣйствія въ суммѣ производили бы тотъ же самый результатъ на перигелій Меркурія. Притомъ, какъ эти астероиды остаются невидимыми при обыкновенныхъ обстоятельствахъ; то отъ распредѣленія ихъ вокругъ солнца могло зависѣть то, что они не вводятъ въ движеніе Меркурія никакого значительнаго неравенства періодическаго.

Гипотеза, къ которой мы приходимъ такимъ образомъ, не имѣетъ въ себѣ ничего неправдоподобнаго. Группа астероидовъ существуетъ между Марсомъ и Юпитеромъ и безъ сомнѣнія только наибольшіе члены оной могутъ быть усмотрѣны нами; есть также основаніе, думать что планетное пространство содержитъ вообще огромное число малыхъ тѣлъ, вращающихся около солнца, а для страны сосѣдней земной орбитѣ, это не сомнѣнно.«

И такъ главныя трудности, представляемыя системою четырехъ нижнихъ планетъ, сводятся на излишекъ движенія въ перегеліи Меркурія и въ перегиліи Марса. Если для космической матеріи возможно такое распредѣленіе, при которомъ она, будучи отчасти или совершенно невидимою для насъ, неменѣе того дѣйствуетъ на ускореніе прямаго движенія въ перигеліяхъ и не производитъ никакого другого вліянія, то понятно, что при этихъ условіяхъ существованіе такой матеріи становится весьма вѣроятнымъ.

И въ самомъ дѣлѣ, таково должно быть дѣйствіе ряда маленькихъ тѣлъ, образующихъ кольцо около солнца, вращающееся, какъ и вся остальная планетная матерія, въ ту же сторону, отъ Запада къ Востоку. Совокупность этихъ тѣлъ не можетъ ни коимъ образомъ измѣнить эксцентриситетъ какой либо изъ планетъ, ни ввести какое либо чувствительное періодическое неравенство въ долготу. Но во противуположность тому

дѣйствіе ихъ на перигелій можетъ сдѣлаться значительнымъ, потому что въ этомъ случаѣ всѣ отдѣльныя дѣйствія складываются и окончательный результатъ почти совершенно таковъ же, какъ еслибы вся матерія была сосредоточена въ одну массу. Эти то соображенія и заставили меня допустить существованіе кольца астероидовъ внутри орбиты Меркурія. Теорія Венеры и Марса представляютъ нынѣ новыя тому подтвержденія.

Возвратимся теперь къ изслѣдованію причинъ, существующихъ на внѣшней границѣ системы 4-хъ внутреннихъ планетъ, и могущихъ увеличить движеніе перигелія Марса. Мы сказали, что это явленіе объясняется, если предположить массу Земли увеличенною на одну десятую ея долю; движеніе Венеры въ широту требуетъ такого же увеличенія количества космической матеріи; но съ другой стороны увеличеніе земной массы представляло бы новую трудность въ отношеніи солнечнаго параллакса.

Всѣ требованія будутъ удовлетворены и трудности изчезнутъ, если мы допустимъ, что астероиды, существующія на разстояніи земли отъ солнца (и наблюдаемыя нами подъ видомъ падающихъ звѣздъ) имѣютъ въ сложности массу, равную одной *десятой* долѣ земной массы. Эта група астероидовъ должна точно также ускорять движеніе перигелія Марса, какъ если бы масса ихъ была прибавлена къ Землѣ. Если притомъ эта группа расположена близь эклиптики, то она производитъ такое же дѣйствіе и на движеніе орбиты Венеры. Впрочемъ она не будетъ имѣть никакого вліянія на періодическіе члены возмущеній Венеры и Марса. Наконецъ отношеніе, существующее между массою Земли, тяжестію и параллаксомъ солнца останется неизмѣннымъ (*)

Въ началѣ мы надѣялись, что изъ періодическихъ возмущеній Марса намъ возможно будетъ извлечь истинную величину массы Земли, и изъ вѣковыхъ возмущеній онаго опредѣлить общее количество массы астероидовъ, распредѣленныхъ между Марсомъ и Юпитеромъ. Но первая часть этой попытки удалась только въ половину, по причинѣ особенныхъ обстоятельствъ, сопутствующихъ наблюденіямъ. При этомъ мы имѣемъ однако основаніе думать, что сама масса Земли не нуждается въ увеличеніи.—Во всякомъ случаѣ понятно, какую огромную важность имѣло бы непосредственное опредѣленіе скорости свѣта и слѣд. величины солнечнаго параллакса.

Что касается общей массы малыхъ планетъ, содержащихся между Марсомъ и Юпитеромъ, то ее не прежде можно опредѣлить, какъ принимая уже извѣстною данною группу астероидовъ на разстояніи Земли отъ Солнца. Не имѣя никакого средства совершенно раздѣлить дѣйствія этихъ обѣихъ группъ, можно только назначить для ихъ массъ высшіе предѣлы, приписывая послѣдовательно каждой изъ нихъ весь излишекъ въ движеніи перигелія Марса. Такимъ образомъ находимъ, что *вся сумма матеріи, составляющей малыя планеты, находящіяся между предѣльными отстояніями отъ солнца* $= 2,20$ *и* $3,16$, *не можетъ превосходить приблизительно одной трети земной массы.*

И такъ составъ внутренней части нашей планетной системы, выводимый изъ разбора наблюденій, можетъ быть представленъ въ слѣдующихъ положеніяхъ.

1-е. Кромѣ планетъ Меркурія, Венеры, Земли и Марса существуетъ между Солнцемъ и Меркуріемъ кольцо астероидовъ, которые въ совокупности составляютъ массу, подходящую къ массѣ самого Меркурія.

2-е. На разстояніи Земли отъ Солнца находится второе кольцо астероидовъ, коихъ масса въ совокупности равна по большей мѣрѣ десятой части массы Земли.

3-е. Цѣлая масса групы малыхъ планетъ, расположенныхъ между Марсомъ и Юпитеромъ, по большей мѣрѣ равна одной трети земной массы.

4-е. Массы двухъ послѣднихъ группъ суть дополнительныя другъ другу; т. е. десять разъ взятая масса группы астероидовъ, находящихся на земномъ разстояніи, будучи сложена съ три раза взятою массою всѣхъ малыхъ планетъ между Марсомъ и Юпитеромъ, должна образовать сумму равную по величинѣ земной массѣ.

Это послѣднее заключеніе зависитъ отъ величины разстоянія земли отъ солнца, основанной на наблюденіяхъ прохожденій Венеры и вообще почитаемой астрономами весьма точною.

Я не отчаеваюсь еще со временемъ бросить нѣкоторый свѣтъ на этотъ деликатный предметъ; но по преимуществу, будущему поколѣнію астрономовъ предстоитъ окончательно разрѣшить эту задачу на основаніи новыхъ, продолжительныхъ и точныхъ наблюденій. Пусть собираемые нами, огромные матеріалы съ пользою послужатъ въ будущемъ. — Сенека, въ одномъ замѣчательномъ мѣстѣ о кометахъ, говоритъ: »рядъ вѣковъ раскроетъ эти тайны; наши потомки удивятся нашему невѣдѣнію истинъ столь простыхъ, столь естественныхъ . . . . Что до насъ, будемъ изучать природу, отважимся на нѣкоторыя соображенія, не воображая однако, что мы достигли уже познанія истины, но также и не отчаеваясь дойти къ ней.« (*).

Г.

(*) Правда, что изъ опредѣленія луннаго уравненія земли мы нашли, что самая масса Земли должна быть увеличина точно такъ же какъ и параллаксъ; но этотъ результатъ зависитъ отъ весьма малой части луннаго уравненія, которая по справедливости не можетъ оправдать такого вывода. Позднѣйшея данныя, которыя мы разбираемъ здѣсь, заслуживаютъ гораздо болѣе довѣрія

(*) Г. *Беронъ*, издатель періодическаго сборника подъ титуломъ „Réforme fondamentale des sciences physiques“ уже прежде Г Леверье высказалъ утвержденіе о существованіи трехъ группъ астероидовъ.

Печатать позволяется, Вильно 20 Іюля 1861 года. *Ценсоръ Статскій Совѣтникъ и Кавалеръ А. Мухинъ.*

ВИЛЬНО Типографія А. Марциновскаго. Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*